Dictature, impossibilité & liberté

Prendre du recul sur différents systèmes de vote

Pierre Bourumeau
Professeur de mathématique et informatique, Lycée Paul Rey, Nay
INSPE - UPPA
Mardi 10 février 2026, Niort

Mis sous le tapis (mais on pourra en discuter lors des questions)

- La place du numérique ;
- La place de l'expertise sur un sujet donné ;
- La place des biais dans le jugement ;
- La notion d'engagement sur un sujet donné ;
- Tout un tas d'autres négligences, faute de temps (histoire du pays, géopolitique, influences étrangères, contexte socio-économique, valeurs et normes, etc.).

Hypothèses

On s'intéresse aux scrutins pour lesquels :

- il y a au moins trois « vrais » choix (ils apparaissent dans le résultat final) ;
- ce n'est pas une dictature.

Sous-entendu bien caché

- La démocratie maximise la satisfaction de la majorité.

(Si la démocratie maximise le consensus, ou si la démocratie minimise l'insatisfaction de la minorité, le choix du mode scrutin peut ne pas être le même ! -> dissensus acceptable)

Sommaire

I. Paradoxe de Condorcet
II. Le scrutin uninominal majoritaire
III. Le vote alternatif et la méthode de Borda
IV. Le théorème d'impossibilité d'Arrow
V. Le jugement majoritaire

Un premier exemple

Voici un ensemble de préférences :

Anastasie : fraise > chocolat > citron
Mandel : citron > fraise > chocolat
Victoire : fraise > citron > chocolat

A quoi faites-vous la tarte ?

Un second exemple

Voici un autre ensemble de préférences :

Anastasie : fraise > chocolat > citron
Mandel : citron > fraise > chocolat
Paige : chocolat > citron > fraise

A quoi faites-vous la tarte ?

Paradoxe de Condorcet

Énoncé :

Lors d'un vote, on demande de classer trois propositions (A, B et C) par ordre de préférence ;

Alors il est possible que :

- une majorité préfère A à B ;
- une autre préfère B à C ;
- une autre préfère C à A.

Le nom vient de Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, dit De Condorcet, qui l'a énoncé en 1785 dans son ouvrage *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. À lire ici.

A retenir

Le Paradoxe de Condorcet
énonce l'**intransitivité**
possible de la majorité.

Il n'y a pas toujours de
classement absolu du choix social !!

(mais ça peut parfois arriver…)

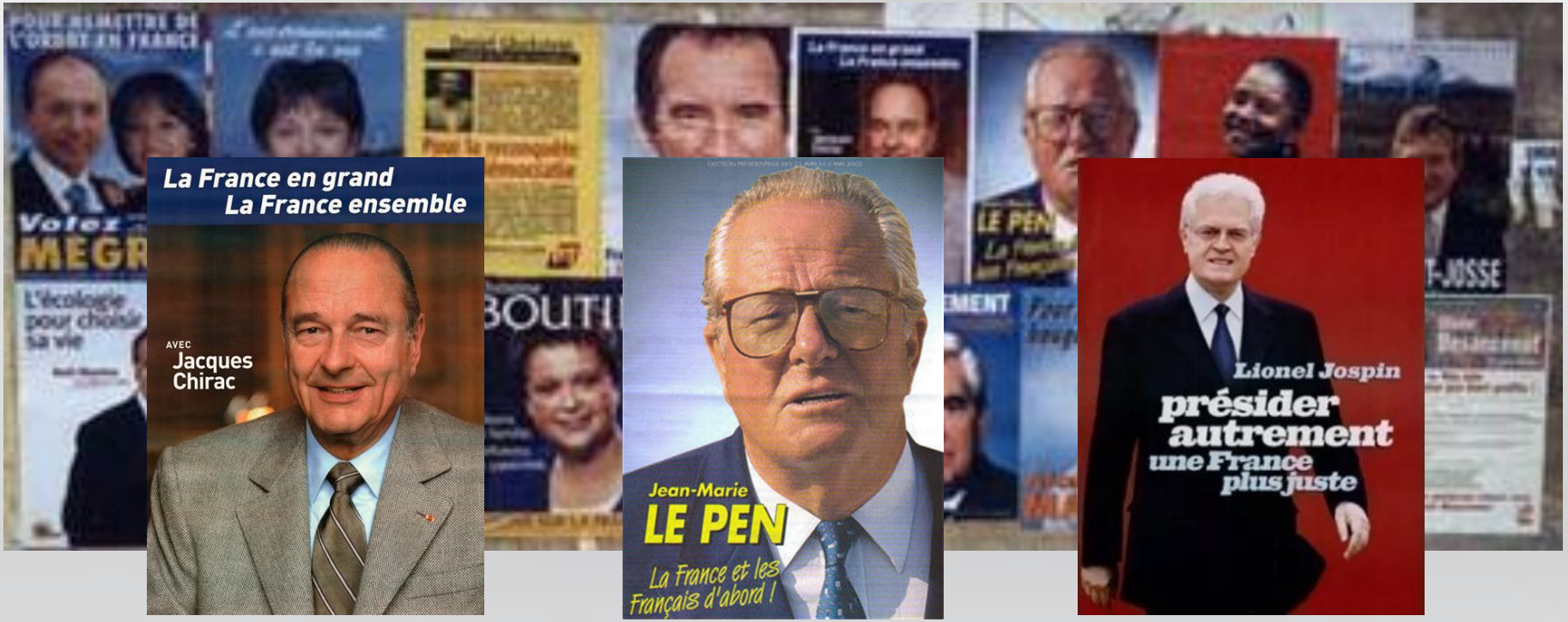
Sommaire

I. Paradoxe de Condorcet
II. Le scrutin uninominal majoritaire
III. Le vote alternatif et la méthode de Borda
IV. Le théorème d'impossibilité d'Arrow
V. Le jugement majoritaire

Notre système de l'élection présidentielle : le scrutin uninominal majoritaire à deux tours

1. 1er tour, on choisit un candidat parmi plusieurs. On compte alors le nombre de voix obtenues par chaque candidat.
    - Si un candidat recueille la majorité absolue, il est élu.
    - Sinon, on organise un second tour avec seulement les deux premiers.
2. 2nd tour, le candidat qui recueille la majorité relative, parmi les suffrages « exprimés », est élu. (en duel, la majorité relative est forcément absolue)

Un exemple : présidentielle 2002



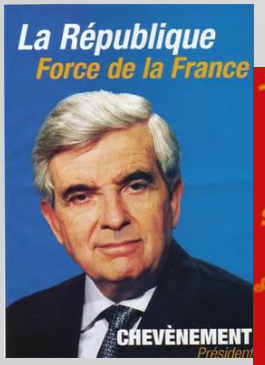
20% 17% 16%

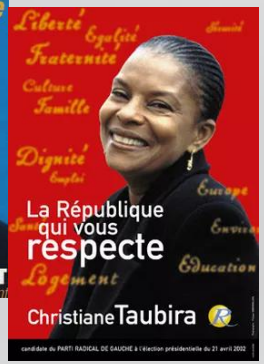
Au Final, M. Chirac fut élu président.

Problème

D'après certains sondages[1] de l'époque, on avait :

- L. Jospin > J. Chirac
- L. Jospin > J.M. Le Pen





<u>Explication possible ?</u>

Dispersion des voix de gauche :

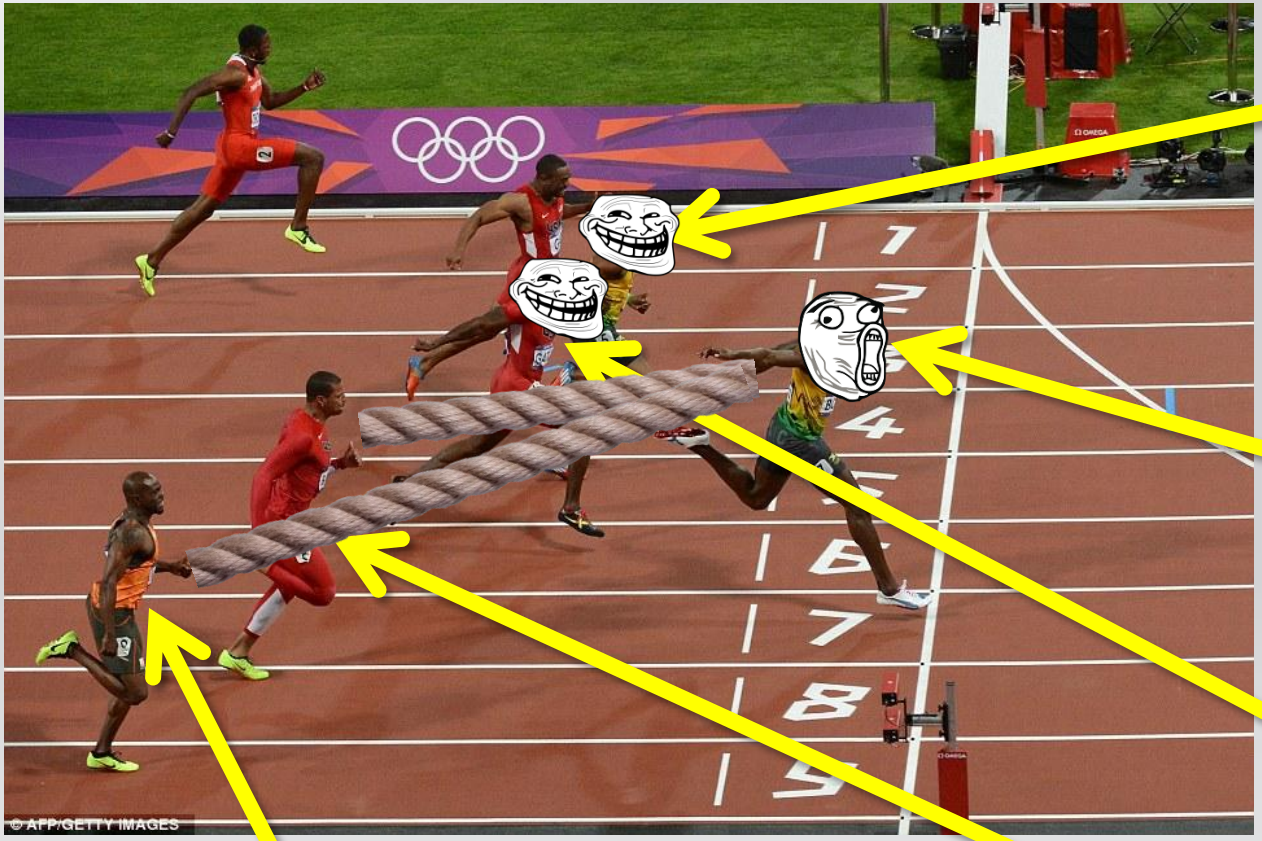
- J.P. Chevènement : 5%
- C. Taubira : 2%

Même scénario qu'en 1995 avec Balladur favori, mais éliminé à cause des voix parties chez P. De Villiers. Et en 2012 avec F. Bayrou !

1. www.france-politique.fr/sondages-electoraux-presidentielle-2002.htm

Une analogie

Finale du 100 m, JO de London 2012



J. Chirac
Yohan Blake

L. Jospin
Usain Bolt

J.M. Le Pen
Justin Gatlin

C. Taubira
Churandy Martina

J.P. Chevènement
Ryan Bailey

L'arnaque ?

Pour compenser cette « bizarrerie » du système électoral, on peut

Voter utile

choisir un candidat moins aimé, mais mieux placé.

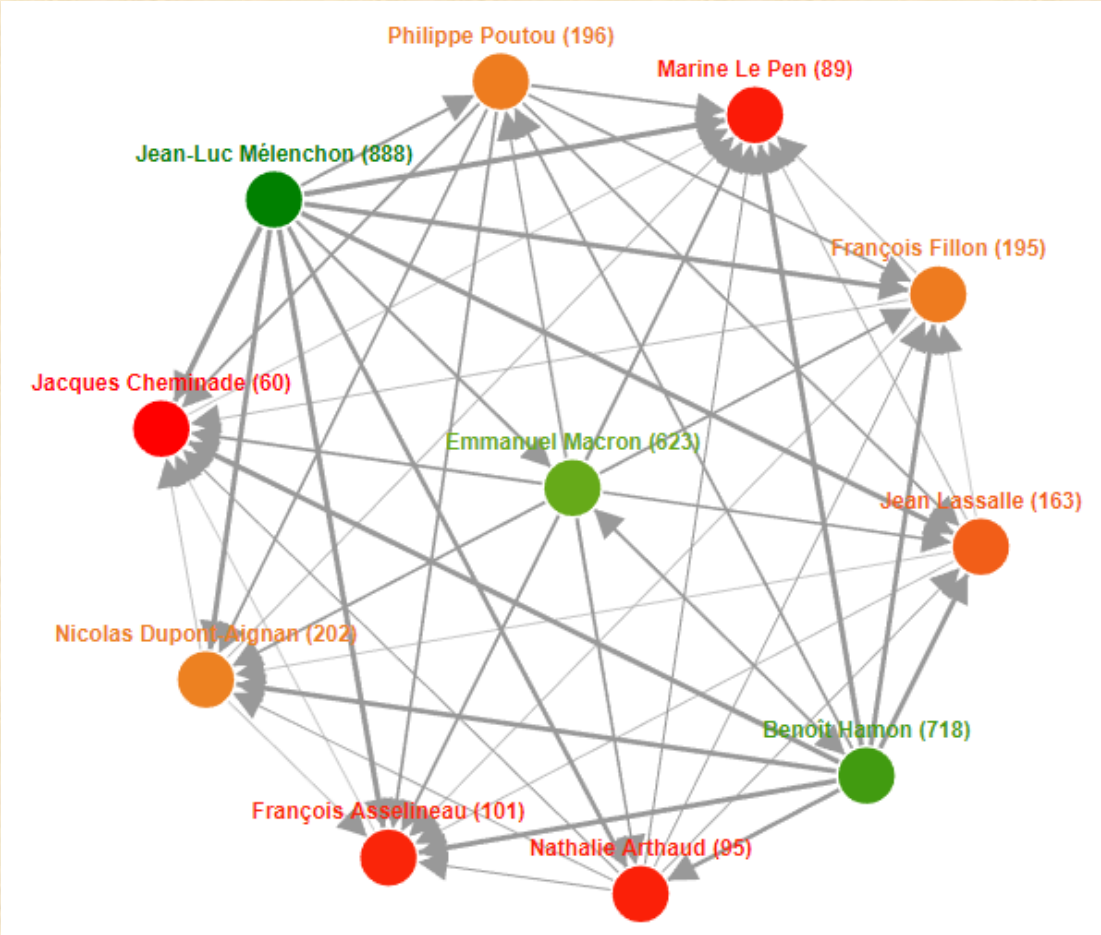
Ou

Voter contestataire

choisir un candidat peu aimé, mais pour le placer mieux.

Présidentielle 2017
Vote par duel

5 188 participants, whale.imag.fr



Pour approfondir le vote par duel, voir le scrutin de **Condorcet Randomisé**.
Une vidéo explicative ici sur la chaîne Science4all de Lê Nguyên Hoang de l'EPFL :
www.youtube.com/watch?v=wKimU8jy2a8

En gros :

- Ce scrutin élit le « vainqueur de Condorcet » s'il existe.
- Sinon, on tire au sort suivant une loi de probabilité qui dépend du graphe des duels.

On peut aussi aller regarder la **méthode de Schulze** (que je ne détaille pas).

A retenir

Dans le scrutin uninominal majoritaire à deux tours, ce n'est pas forcément le meilleur de chaque duel qui est élu.

Sommaire

I. Paradoxe de Condorcet
II. Le scrutin uninominal majoritaire
III. Le vote alternatif et la méthode de Borda
IV. Le théorème d'impossibilité d'Arrow
V. Le jugement majoritaire

Le vote alternatif, une alternative ?

Principe :

- Eliminer à chaque tour le candidat avec le moins de voix.
- Recommencer jusqu'à ce qu'il n'en reste qu'un.

Problème :

Optimisation : en un seul tour !!

- Chaque électeur classe TOUS les candidats.

Image piquée à la chaîne Youtube ScienceEtonnante qu'il faut aller voir (lien en sources).

Optimisation : en un seul tour !!

- Chaque électeur classe TOUS les candidats.
- On élimine le candidat le moins choisi en 1er choix.

Image piquée à la chaîne Youtube ScienceEtonnante qu'il faut aller voir (lien en sources).

Optimisation : en un seul tour !!

- Chaque électeur classe TOUS les candidats.
- On élimine le candidat le moins choisi en 1er choix.
- On recommence en négligent le candidat éliminé précédemment.

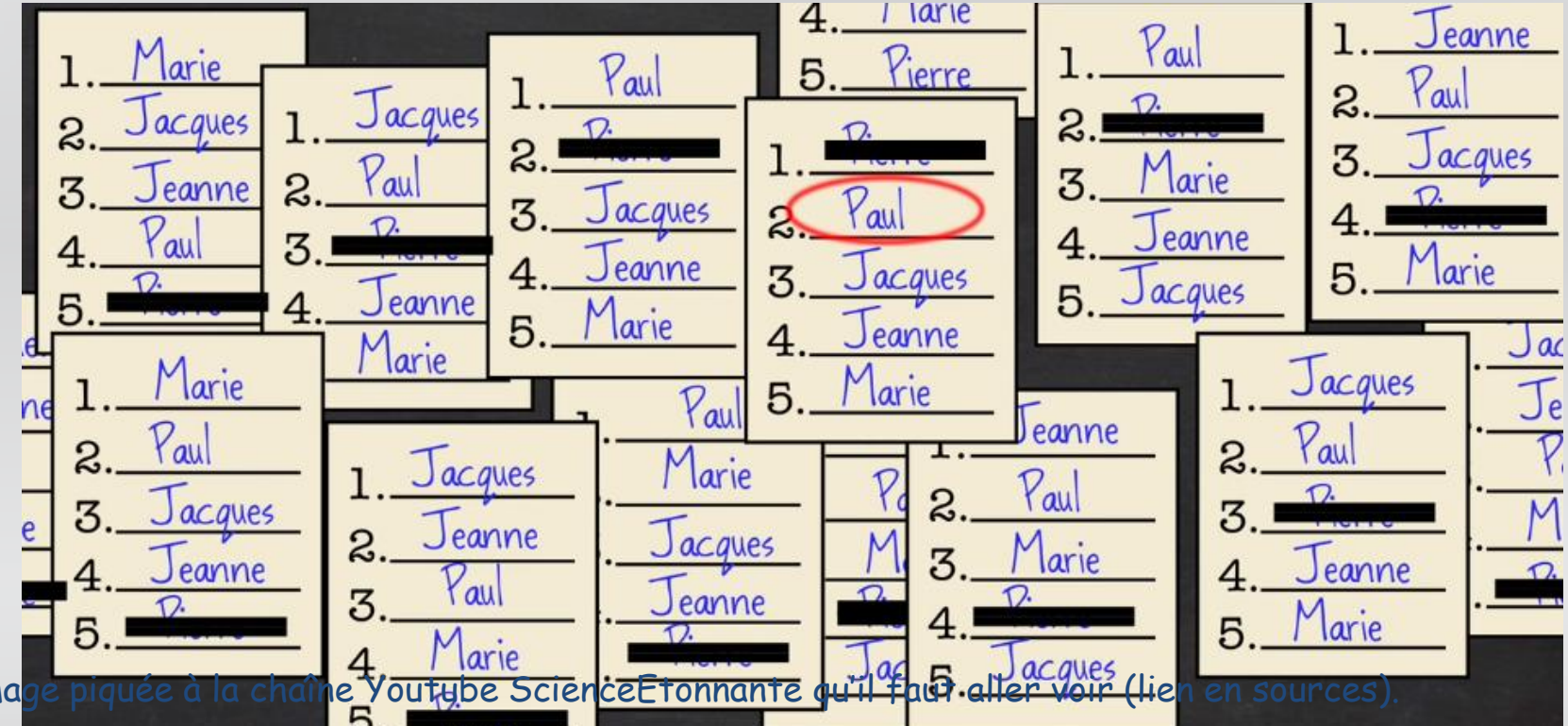


Image piquée à la chaîne Youtube ScienceEtonnante qu'il faut aller voir (lien en sources).

Optimisation : en un seul tour !!

- Chaque électeur classe TOUS les candidats.
- On élimine le candidat le moins choisi en 1er choix.
- On recommence en négligent le candidat éliminé précédemment.
- Etc.

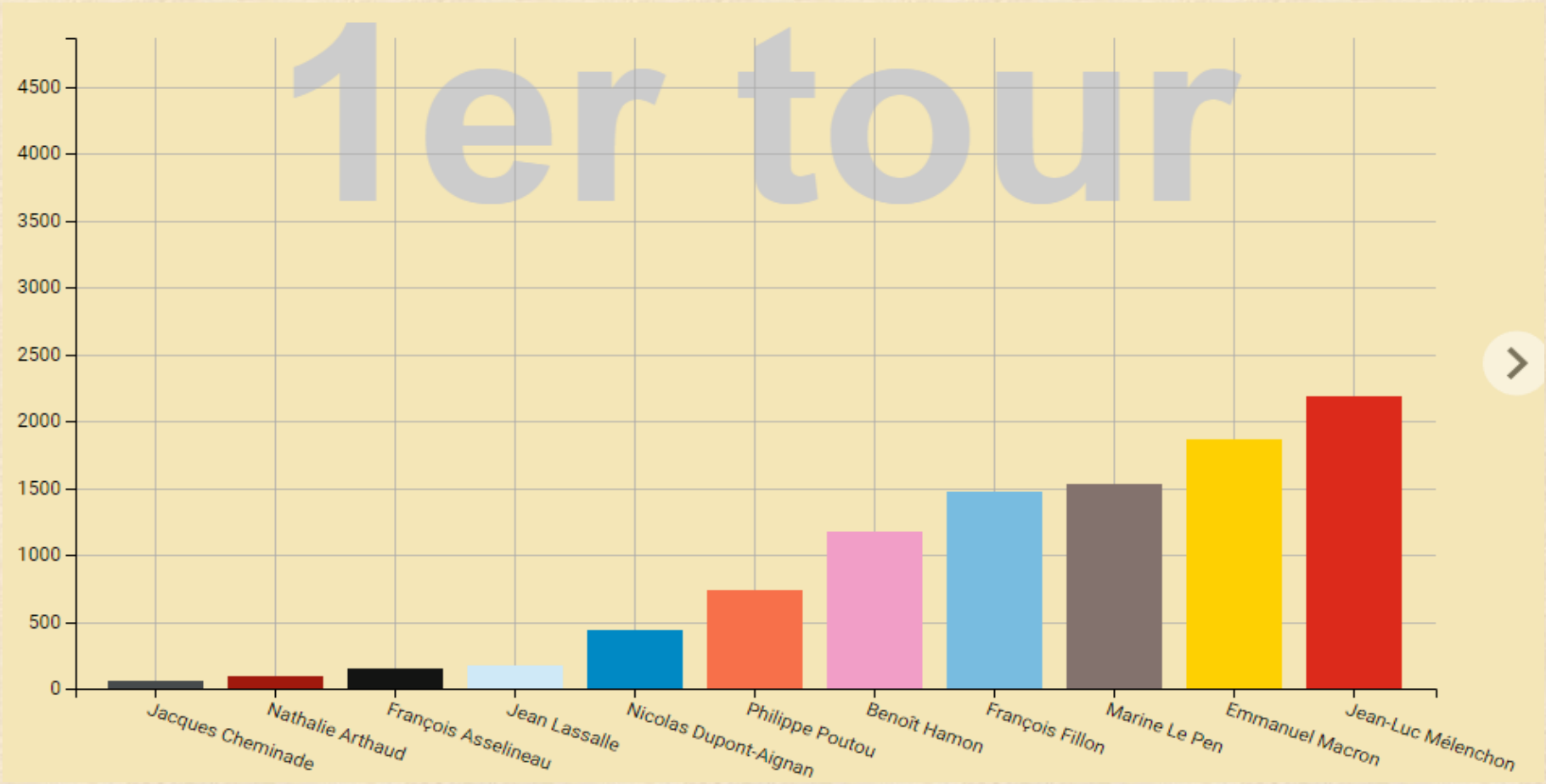
Utilisée pour élire :

- chambre des représentants en Australie ;
- président irlandais ;
- certains maires américains.

Images piquée à la chaîne Youtube ScienceEtonnante qu'il faut aller voir (lien en sources).

Présidentielle 2017
Vote par élimination successive

37 739 participants, CNRS



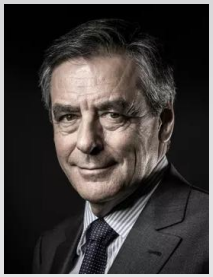
Avantages et inconvénients ?

Et pourtant…

Une situation imaginaire

34% > >

32% > >

34% >  >

Une situation imaginaire

34% >

32% >

34% >

Résultat

Nouvelle situation :
E. Macron prend 3% à M. Le Pen

37% > >

32% > >

31% > >

Nouvelle situation

37% >

32% >

31% >

Résultat

A retenir

Paradoxe d'Arrow :

Progresser dans l'opinion peut amener le candidat à descendre dans le classement.

Cela incite au **vote stratégique** :
Ne pas voter pour un candidat afin qu'il progresse dans le classement !

(ce résultat est totalement contre intuitif)

Pour aller plus loin : méthode de Coombs

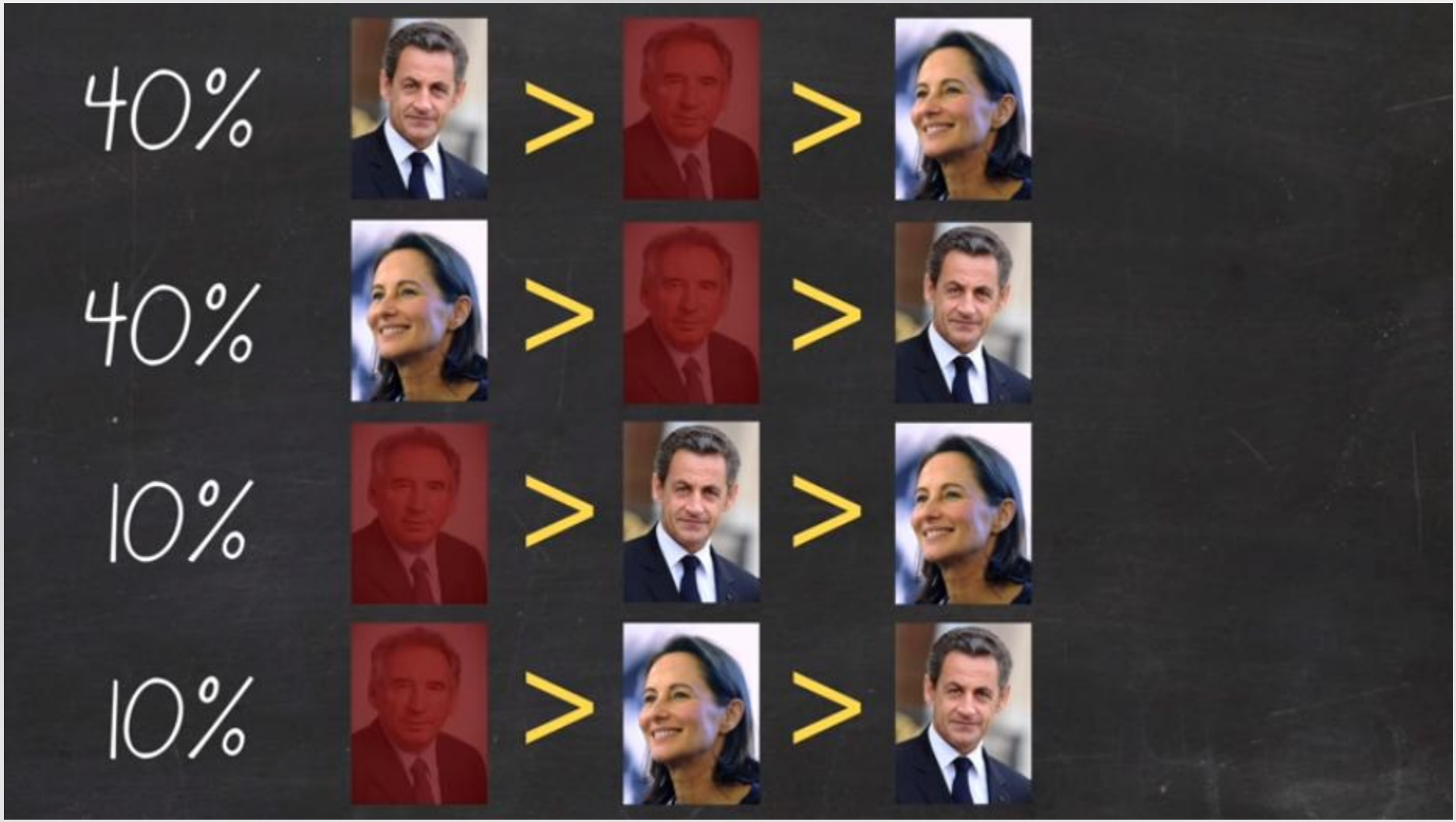
Méthode de J.C. Borda

- Attribuer des points à chaque candidat.
- Elire celui qui en a le plus.

1. Marie 5
2. Jacques 4
3. Jeanne 3
4. Paul 2
5. Pierre 1

Un exemple sans Borda

F. Bayrou est éliminé

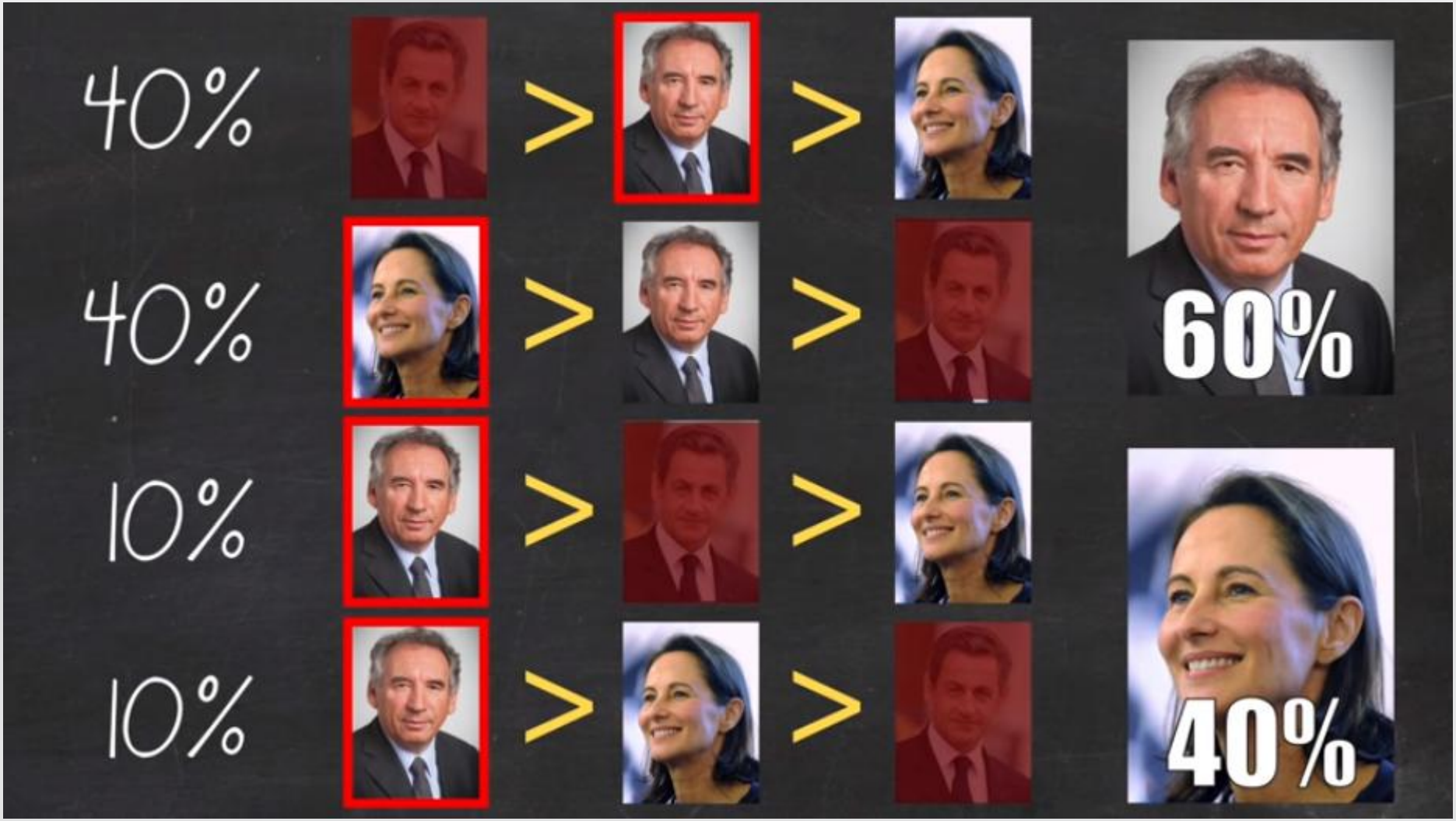


Un exemple sans Borda

F. Bayrou gagne son duel contre N. Sarkosy

Un exemple sans Borda

F. Bayrou gagne sont duel contre S. Royal



Même exemple avec la méthode Borda

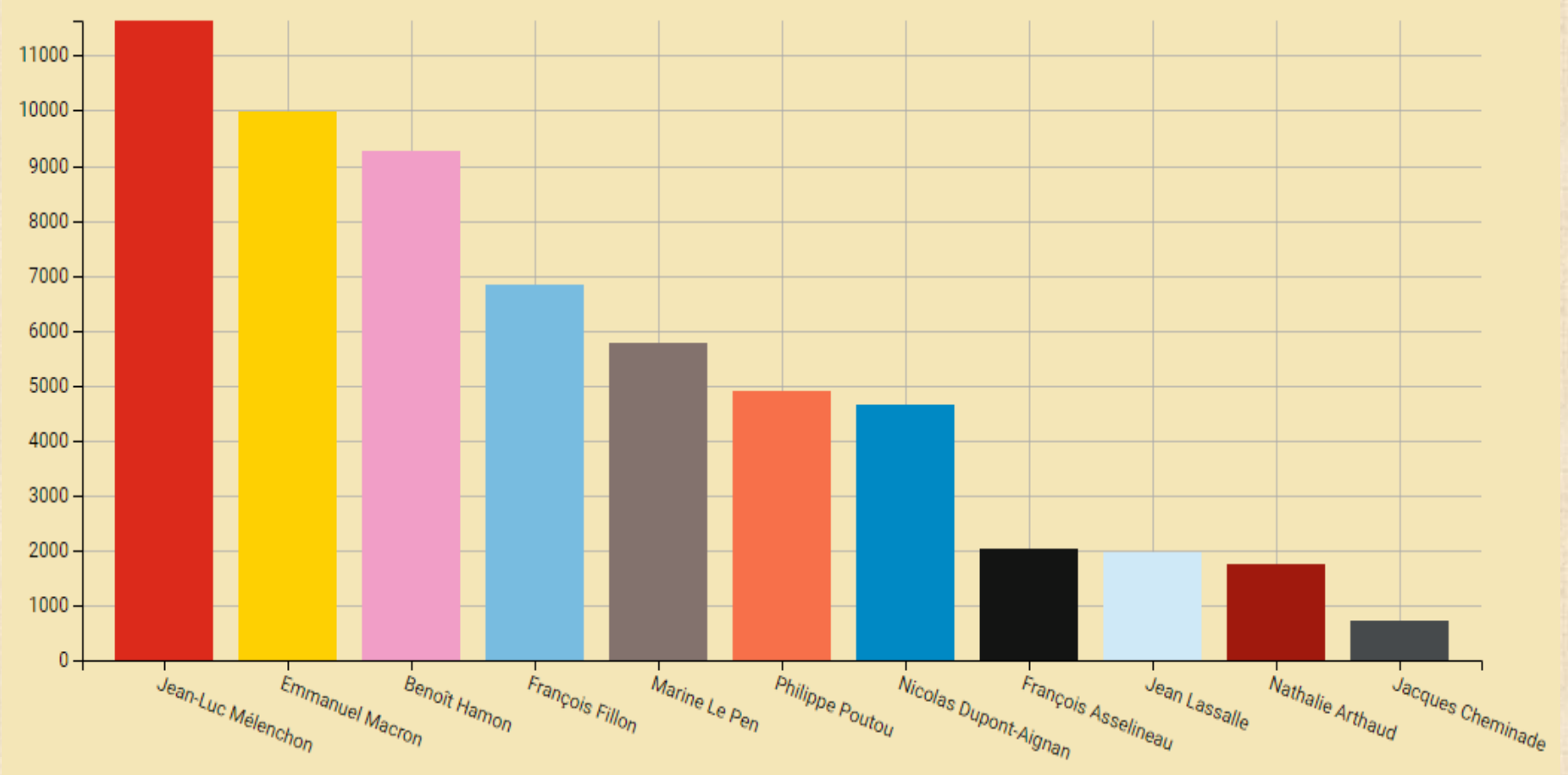
Une solution parfaite ?

- encourage les votes tactiques :
  - abandonner le candidat favori si celui-ci n'a aucune chance de l'emporter.

    (c'est déjà le cas dans les précédents)
  - choisir de défavoriser un candidat en le plaçant dans un rang inférieur la préférence réelle.
- Certains partis peuvent être amenés à multiplier les candidatures d'un même bord pour amplifier les écarts de points.

Présidentielle 2017
Méthode Borda 4

37 739 participants, CNRS



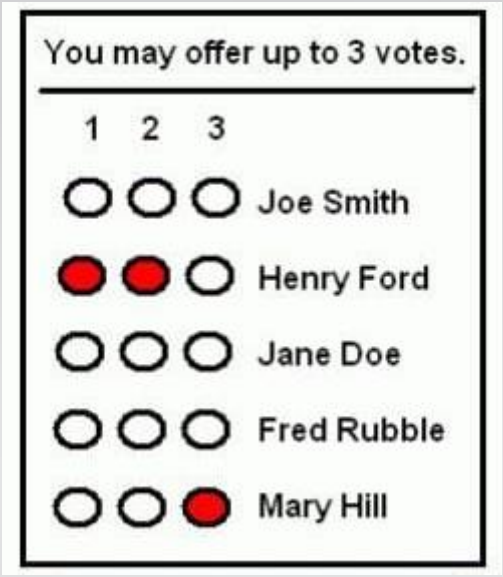
Des variantes

- Ne pas classer tous les candidats :

si on n'en classe que 3 parmi 5 par exemple, le 1er ne reçoit que 3 points (au lieu de 5).
Si on n'en classe qu'un, il ne reçoit que 1 point !
-> incite à se prononcer.
-> évite la multiplication des candidatures.

- Le **vote Cumulatif** :

Vous avez un certain nombre de points à panacher entre les candidats.
Plus de détails ici (en anglais)



Les conditions idéales ?

- ✓ Un électeur ne doit pas pouvoir faire diminuer le classement global d'un candidat en le classant plus haut:

Monotonie

Autrement dit, si les préférences entre X et Y changent en faveur de X, alors leur classement relatif ne peut pas changer en faveur de Y.

Les conditions idéales ?

- ✓ Si tous les électeurs préfèrent X à Y, alors le classement commun doit préférer X à Y :

Unanimité

- ✓ Il n'existe aucun électeur pour lequel la liste de ses choix personnels coïncide avec le résultat, indépendamment des préférences des autres :

Non-dictature

Si on veut être entièrement rigoureux, on utilise l'axiome de **symétrie** (voir lien diapo 61 pour les détails)

Les conditions idéales ?

- ✓ Le classement relatif de deux candidats ne doit dépendre que de leur position relative pour les électeurs et non du classement d'options tierces

Indépendance des alternatives non pertinentes

A retenir

Les conditions idéales sont :

- ✓ Monotonie
- ✓ Unanimité
- ✓ Non-dictature
- ✓ Indépendance des alternatives non pertinentes

Le scrutin uninominal majoritaire à deux tours ne vérifie pas la **monotonie** (un candidat qui monte dans les sondages peut finir moins bien classé). Idem pour le vote alternatif et la méthode Borda.

Sommaire

I. Paradoxe de Condorcet
II. Le scrutin uninominal majoritaire
III. Le vote alternatif et la méthode de Borda
IV. Le théorème d'impossibilité d'Arrow
V. Le jugement majoritaire

Le théorème d'Arrow

Kenneth **Arrow** :

- 1921-2017
- Economiste américain
- Prix Nobel d'économie 1972
- Université de Chicago et Stanford

- Fondateur de l'école néoclassique moderne
- Théorie du choix social
- Théorie de la croissance endogène
- Economie de l'information
- Théorie de l'équilibre général.

Le théorème d'Arrow

Énoncé:

Si une élection a au moins 3 candidats,

Alors les conditions suivantes sont incompatibles :

- Monotonie
- Unanimité
- Non-dictature

Pour les matheux qui veulent du formalisme, il y a ce lien : présentation de M. Eisermann de l'université Joseph Fourier de Grenoble.
Et une démonstration du théorème du dictateur est ici proposée par M. Cyril Charignon.

Application au scrutin uninominal

Une situation possible d'avis où cinq candidats se présentent : a, b, c, d, et e.
Nous supposerons qu'il y a 21 électeurs, et nous connaissons l'ordre de préférence de chaque électeur sur les candidats :

- Pour 3 électeurs : $a > b > c > e > d$;
- Pour 5 électeurs : $c > b > a > d > e$;
- Pour 6 électeurs : $d > b > a > c > e$;
- Pour 7 électeurs : $e > b > a > c > d$.

d et e vont en final, et d gagne.
c est pourtant préféré à d.

Manipulation du scrutin uninominal

Les 3 premiers électeurs, conscients que a et b n'ont aucune chance, décident de voter pour leur troisième candidat, c. La situation est alors :

- Pour 3 électeurs : $c > a > b > e > d$;
- pour 5 électeurs : $c > b > a > d > e$;
- pour 6 électeurs : $d > b > a > c > e$;
- pour 7 électeurs : $e > b > a > c > d$.

c et e vont en finale, et c gagne.
Les quatre électeurs ont eu raison de ne pas respecter leur préférence car ceci mène à l'élection de c à la place de d, et ils préfèrent effectivement c à d.

Dépendance aux alternatives

Un nouveau candidat, f, se présente. Il a en tout et pour tout deux partisans dans la population (pris sur ceux de d). La nouvelle situation est :

- Pour 3 électeurs : $a > b > c > e > d > f$;
- pour 5 électeurs : $c > b > a > d > e > f$;
- pour 4 électeurs : $d > b > a > c > e > f$;
- pour 7 électeurs : $e > b > a > c > d > f$;
- pour 2 électeurs : $f > d > b > a > c > e$.

c et e vont en final, et c gagne.
L'apparition d'un candidat peu aimé change le résultat de l'élection !

Impact de l'abstention

Sachant que c n'a aucune chance, ses électeurs s'abstiennent, et 2 ne vont pas voter :

- Pour 3 électeurs : $a > b > c > e > d$;
- Pour 3 électeurs : $c > b > a > d > e$;
- Pour 6 électeurs : $d > b > a > c > e$;
- Pour 7 électeurs : $e > b > a > c > d$.

d et e vont en final, et e gagne.
C'est d'autant plus dommage que c est majoritairement préféré à d et à e !

Que faire ?

- Accepter de continuer avec un système électoral qui ne reflète pas un choix de société.

- Changer les règles des scrutins :

L'hypothèse cachée est l'obligation de **classer les candidats**. (Arrow l'avait clairement formalisée, mais elle est tellement imposée par notre société qu'on l'oublie !)

En particulier, classer M. X en 2e position et M. Y en 3e position ne dit pas si cet écart de position correspond à une **large préférence** ou une **faible préférence**.

Sommaire

I. Paradoxe de Condorcet
II. Le scrutin uninominal majoritaire
III. Le vote alternatif et la méthode de Borda
IV. Le théorème d'impossibilité d'Arrow
V. Le jugement majoritaire

Le vote par approbation

Principe :

- Mettre autant de noms dans l'enveloppe.
- Elire le candidat le plus présent.

Avantages :

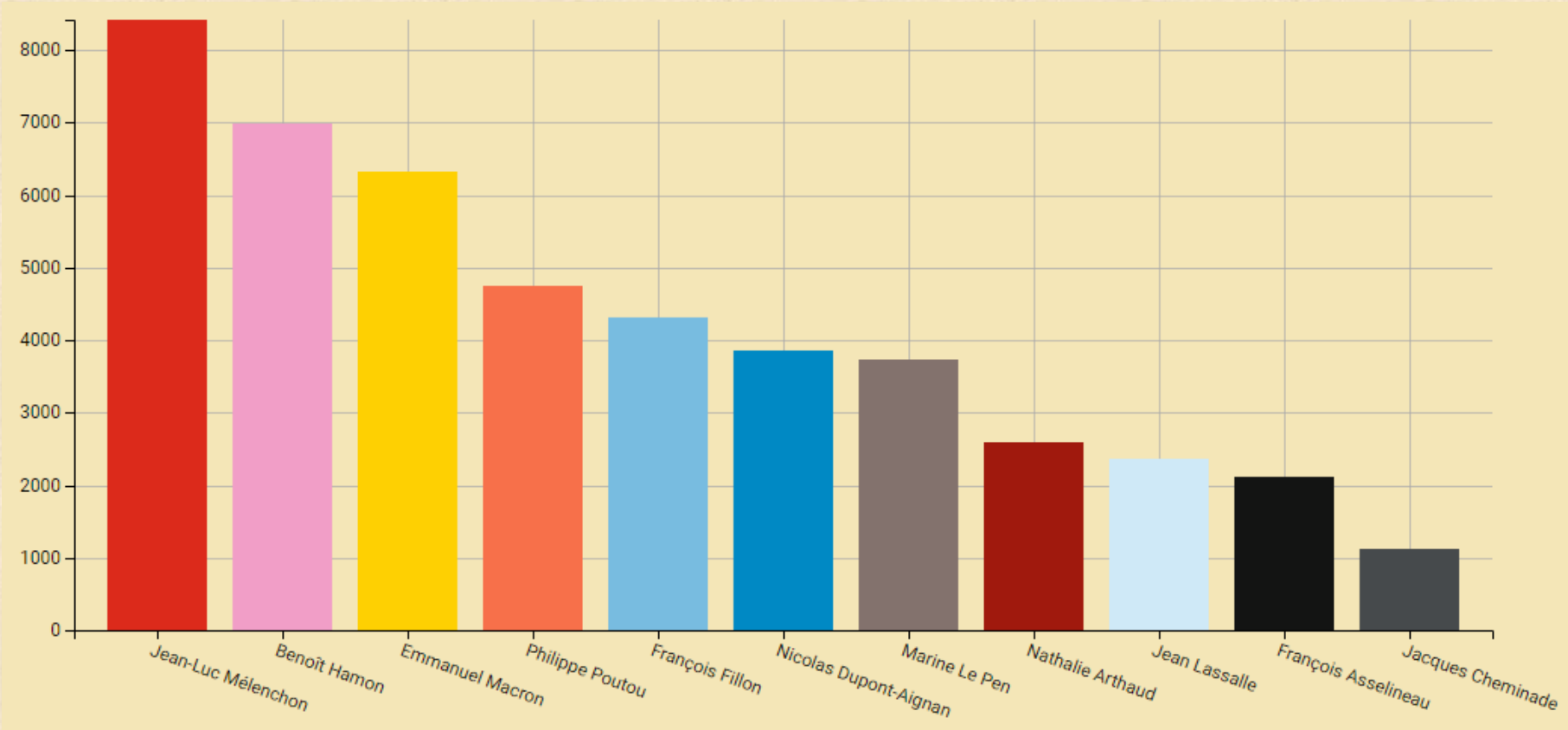
- 1 seul tour, et facile à dépouiller.
- Insensible aux petites candidatures.

Inconvénient :

- Absence de graduation dans l'approbation.

Présidentielle 2017
Vote par approbation

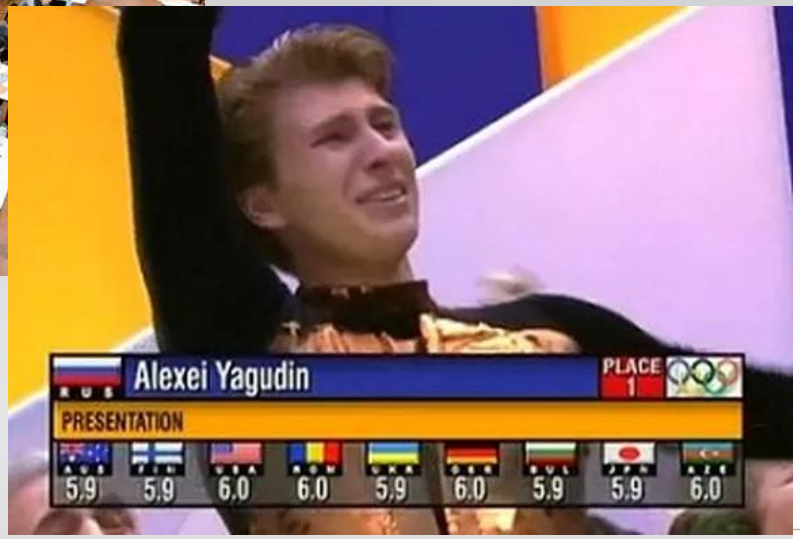
37 739 participants, CNRS

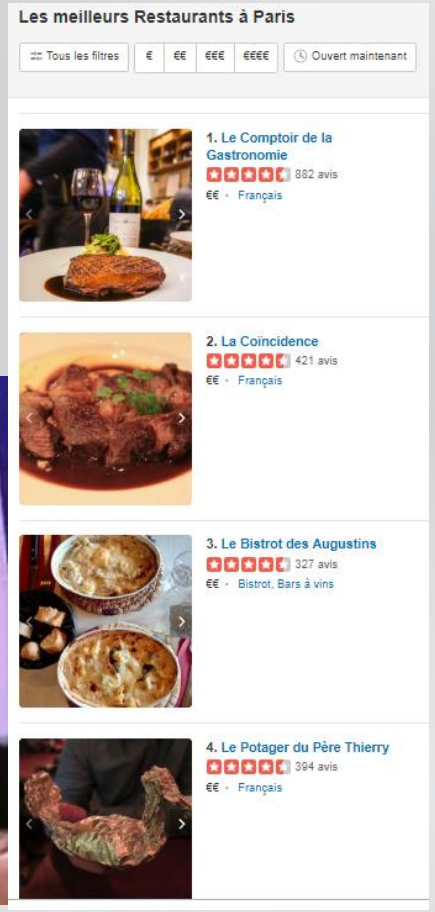


Une amélioration : le vote par notation

Noter les candidats :

Exemples : candidats à un concours, sportifs, restaurants, films, etc.





Une amélioration : le vote par notation

Noter les candidats :
Exemples : candidats à un concours, sportifs, restaurants, films, etc.

Avantage :
Graduer l'approbation

Inconvénient :
Exagérer la note dans un sens ou dans l'autre.

Autres inconvénients :

- 15/20 veut-il dire toujours la même chose ?

Ex : différence de notation entre établissements.

- Le choix de l'échelle influence la notation :
  - Petit barème -> plus généreux

Ex : de 0 à 5, de F à A

  - Barème détaillé -> moins généreux

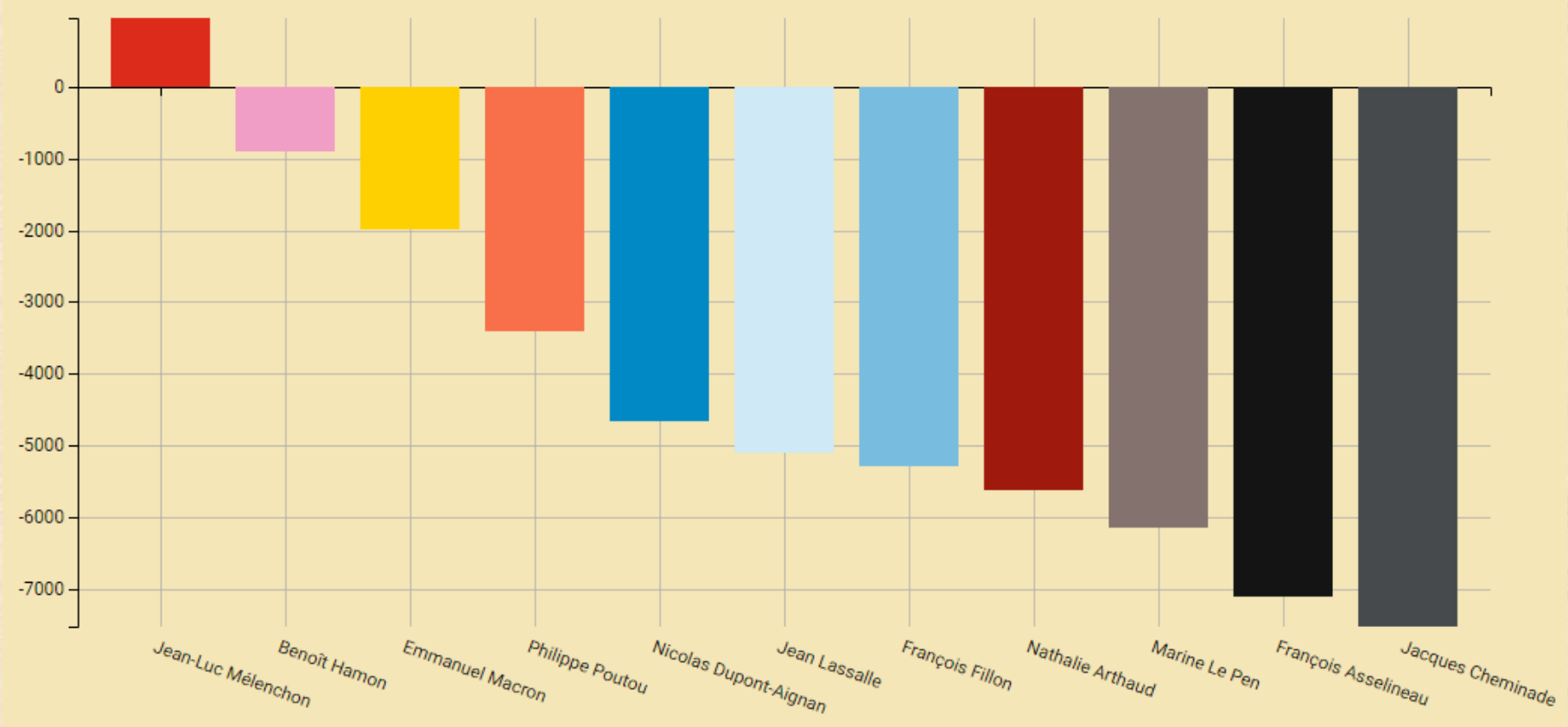
Ex : de 0 à 100, ou de 0 à 20 à 0,25pt près

  - Connotation des valeurs négatives

Ex : de 0 à 10 ou de -5 à 5.

Présidentielle 2017
Vote par notation (-1,0,1)

37 739 participants, CNRS



Le jugement majoritaire

Rida Laraki : 1973

Ingénieur diplômé de l'Ecole Polytechnique
Docteur en mathématiques
Chercheur CNRS en informatique
Professeur à l'École Polytechnique (département d'économie)
Professeur honoraire à l'université de Liverpool
Théorie des jeux, le choix social, l'économie théorique, etc.

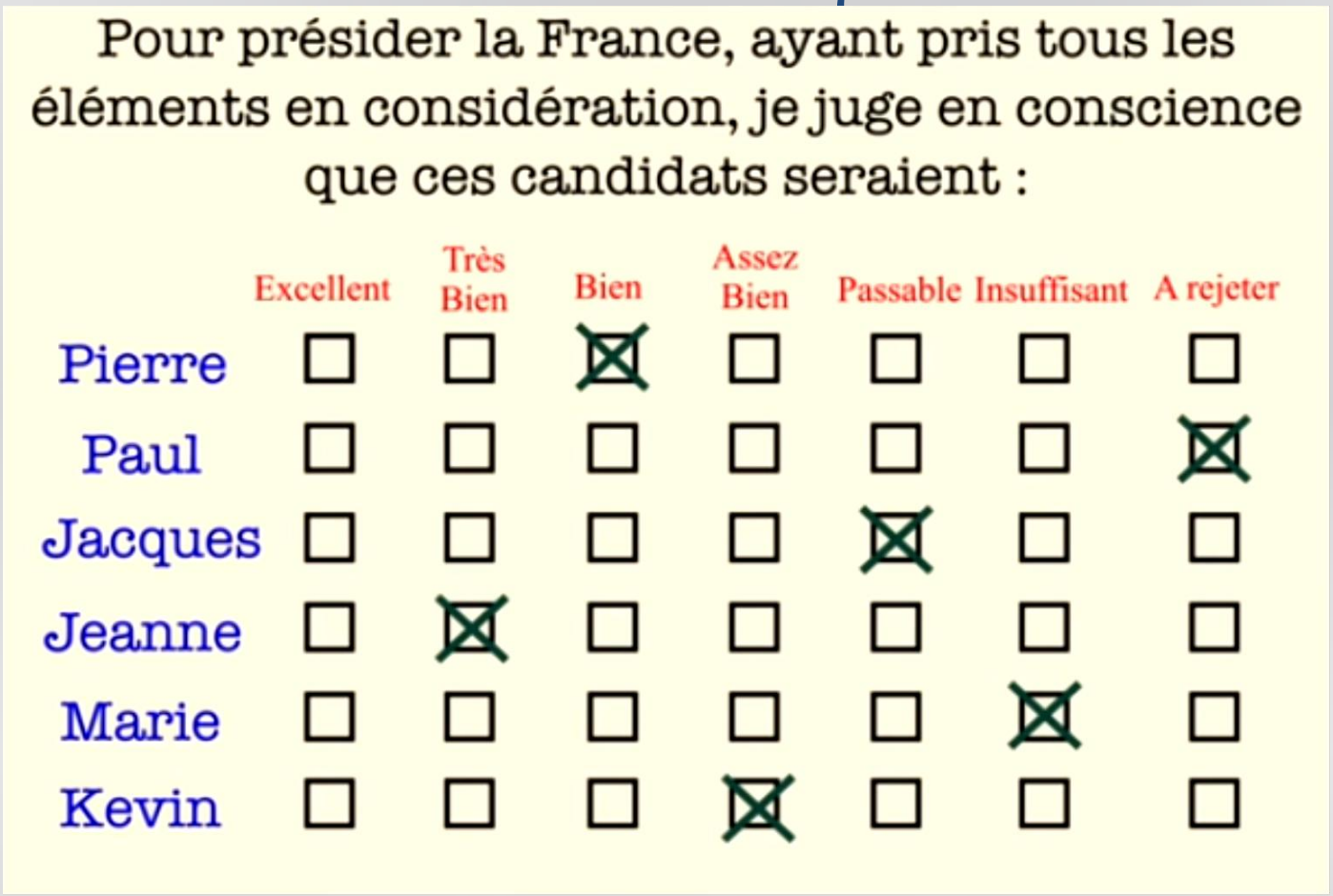
Michel Balinski : 1933-2009

Economiste
Mathématicien
Professeur à Yale, Princetown, New-York
Chercheur CNRS à l'école Polytechnique

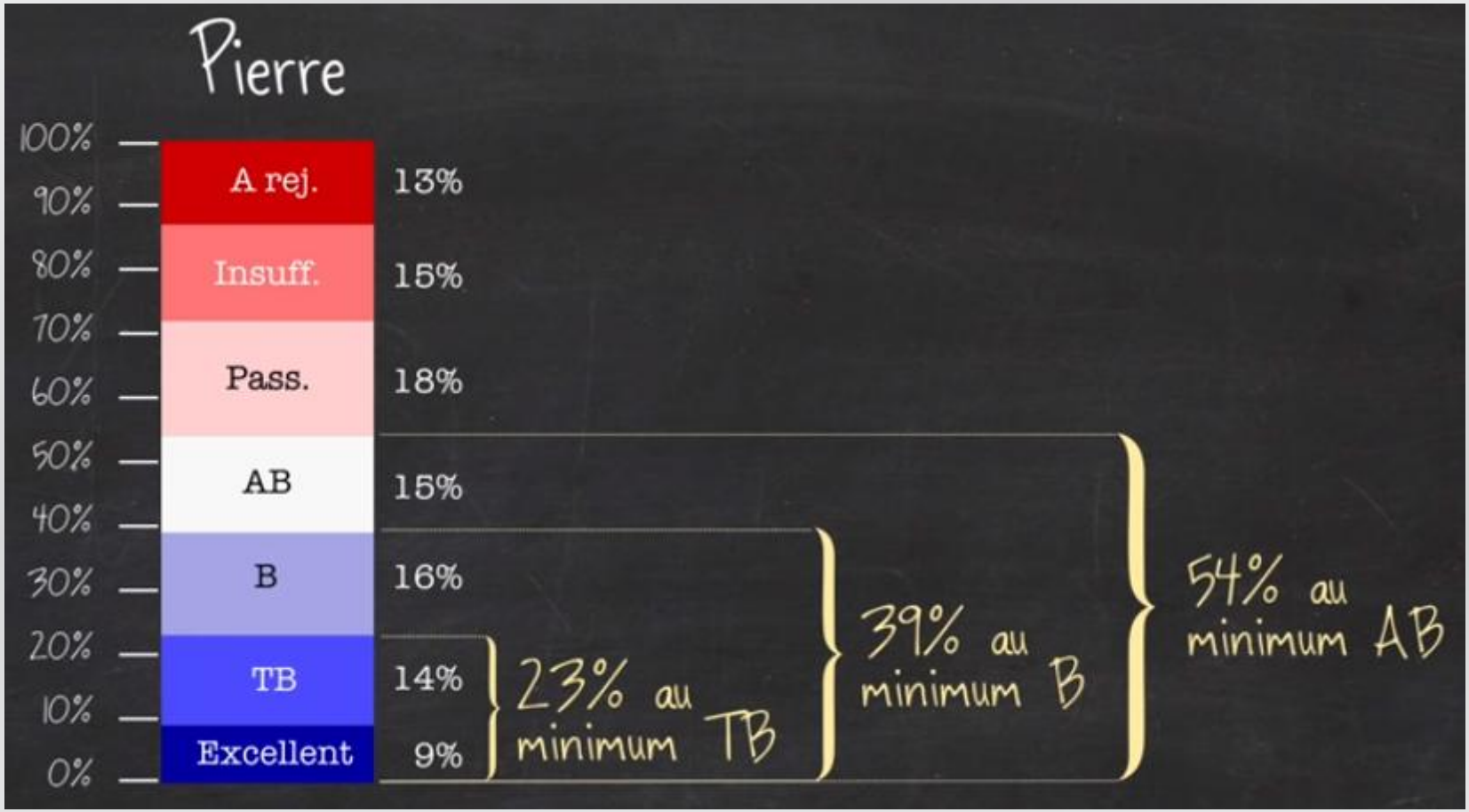
Le jugement majoritaire

Principe :

On attribut une mention à chaque candidat.

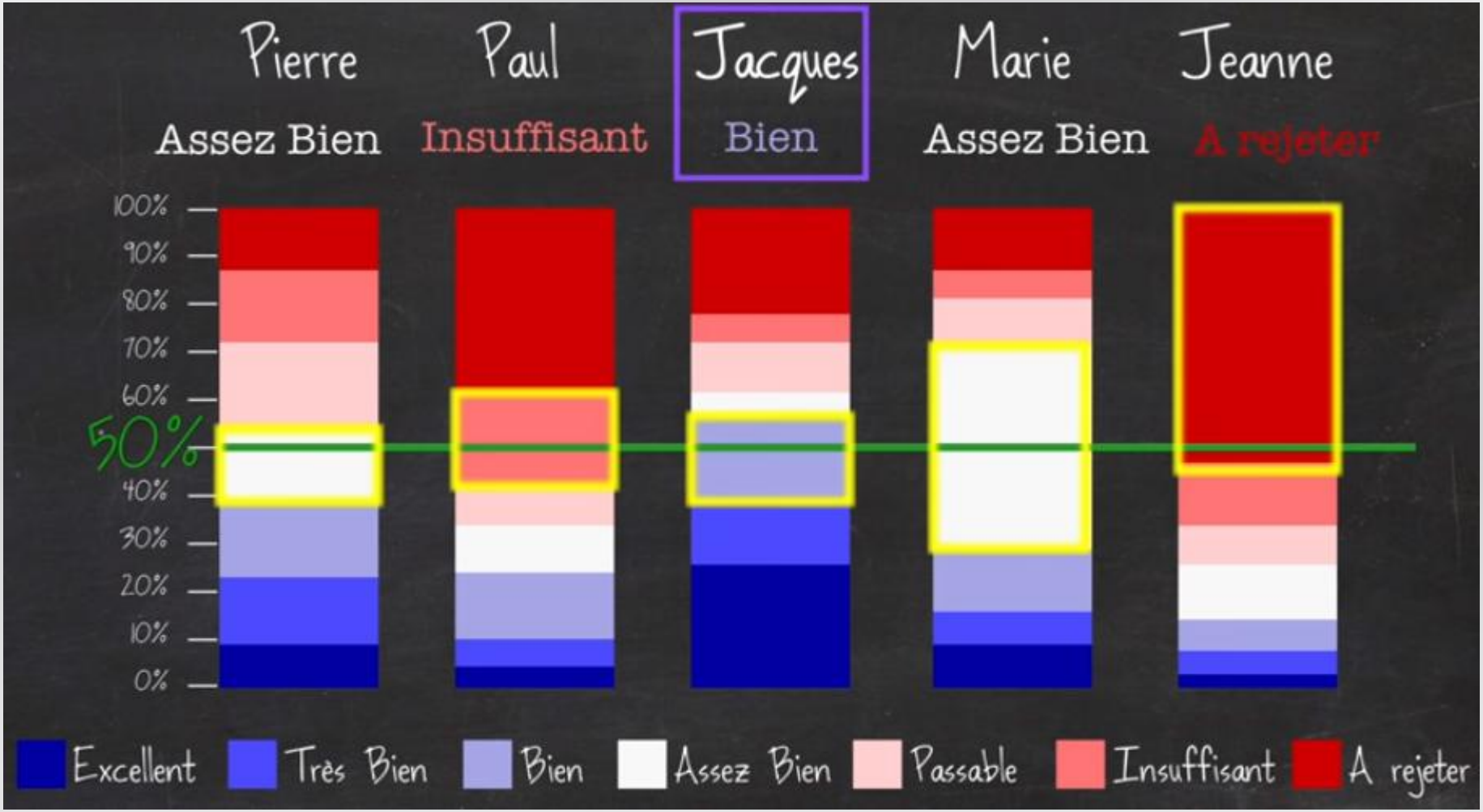


Le jugement majoritaire



Images piquées à nouveau à la chaîne Youtube ScienceEtonnante.

Le jugement majoritaire



Images piquées à nouveau à la chaîne Youtube ScienceEtonnante.

Le jugement majoritaire

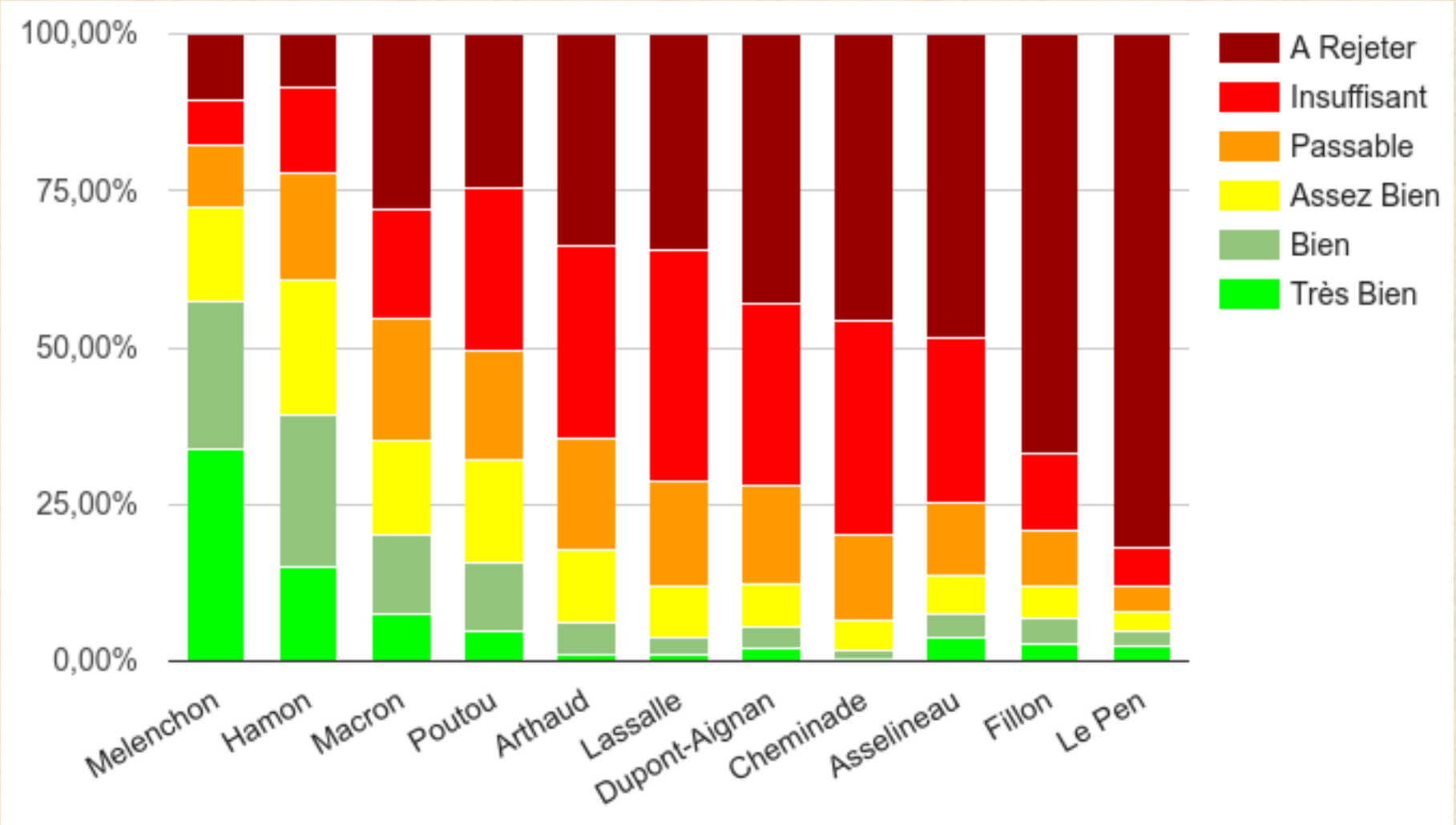
Avantages :

- ✓ pas de sensibilité aux petites candidatures
  -> disparition du vote utile
- ✓ pas de paradoxe d'Arrow
  -> croissance de l'opinion
- ✓ pas de vote stratégique
  -> disparition des exagérations

- ✓ prise en compte de la contestation !

Présidentielle 2017
Jugement majoritaire

52 809 votants, laprimaire.org



A retenir

- Le résultat d'une élection est très dépendant du mode de scrutin.
- Le meilleur (avis personnel, donc très très très discutable) mode scrutin actuellement connu est le jugement majoritaire.
  (mais Condorcet Randomisé est bien aussi, comme le vote par notation.)

Et pour vous ?

(Et ne pas oublier l'objectif d'une démocratie : maximiser la satisfaction de la majorité ? maximiser le consensus ? minimiser l'insatisfaction de la minorité ? autre ?)

Pour aller plus loin

- Avec l'arrivée des réseaux sociaux et des algorithmes de recommandation, un bulletin est-il toujours un choix de « pleine conscience » ?
  (ex : affaire Cambridge Analytica)

- L'élection n'est pas le seul mode de répartition du pouvoir :
  - Assemblées constituantes
  - Conventions citoyennes
  - Etc.

Merci pour votre attention

Sources :

- K.J. Arrow : Social choice and individual values, John Wiley & Sons, New York 1951.

rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/epdf/10.2307/2980848

- L'expérimentation du CNRS/CREM/PSE/GATE-LSE/US-BETA/UGA-LIG : vote.imag.fr
- Publication scientifique de M. Balinski et R. Laraki :

www.pnas.org/content/104/21/8720

- Page de Rida Laraki :

www.lamsade.dauphine.fr/fr/recherche/poles/aide-a-la-decision/detail-cv/profile/rida-laraki.html

- Pour approfondir : article de D. Louapre :

scienceetonnante.com/2016/10/21/reformons-lelection-presidentielle

- Pour approfondir : vidéo de tzitzimitl – esprit critique :

www.youtube.com/watch?v=03NtiW-NXcI

- Wikipédia pour certains portraits
- Autres sources directement dans le document